

试卷代号:11080

座位号

国家开放大学2023年秋季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题

2024年1月

注意事项:

1. 将你的学号、姓名及考点名称填写在试题和答题纸的规定栏内。考试结束后,把试题和答题纸放在桌上。试题和答题纸均不得带出考场。待监考人员收完试题和答题纸后方可离开考场。
2. 仔细阅读题目的说明,并按题目要求答题。所有答案必须写在答题纸的指定位置上,写在试题上的答案无效。
3. 用蓝、黑圆珠笔或钢笔(含签字笔)答题,使用铅笔答题无效。

一、单项选择题(本题共5小题,每小题3分,共15分)

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵,则下列命题中正确的是()。
 - A. 若 $AB=O$,则 $A=O$ 或 $B=O$
 - B. 若 $AB=I$,则 $A=I$ 或 $B=I$
 - C. $|AB|=|A||B|$
 - D. $AB=BA$
2. 设 A 与 $[A:B]$ 分别代表非齐次线性方程组 $AX=B$ 的系数矩阵和增广矩阵,若这个方程组有解,则()。
 - A. $r(A)=r([A:B])$
 - B. $r(A)<r([A:B])$
 - C. $r(A)>r([A:B])$
 - D. $r(A)=r([A:B])-1$
3. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为()。
 - A. $-1, 2$
 - B. $-1, 4$
 - C. $1, -1$
 - D. $1, 4$
4. 掷两颗均匀的骰子,事件“点数之和为5”的概率是()。
 - A. $\frac{1}{36}$
 - B. $\frac{1}{18}$
 - C. $\frac{1}{12}$
 - D. $\frac{1}{9}$

5. 对单正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知时,关于均值 μ 的假设检验应采用()。
 - A. F 检验法
 - B. t 检验法
 - C. U 检验法
 - D. χ^2 检验法

二、填空题(本题共5小题,每小题3分,共15分)

6. 设 A, B 均为 n 阶矩阵,则 $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$ 成立的充分必要条件是_____。
7. 设非齐次线性方程组 $AX=B$ 的一般解中自由元的个数是3,其中 A 是 4×5 矩阵,则方程组的增广矩阵的秩 $r([A:B])=$ _____。
8. 设 A, B 是两个随机事件,且 $P(B) \neq 0$,则称 $P(A|B)$ 为事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的_____。
9. 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$,则 $E(X)=$ _____。
10. 设随机变量 X ,若 $D(X)=2$,则 $D(-2X+1)=$ _____。

三、计算题(本题共4小题,每小题16分,共64分)

11. 解矩阵方程 $AX-X=B$,其中 $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 。
12. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_2-x_3+4x_4=0 \\ x_1-4x_3+5x_4=0 \end{cases}$ 的通解。
13. 设 $X \sim N(3, 4)$,试求:(1) $P(5 < X < 9)$; (2) $P(X > 7)$ 。(已知 $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2)=0.9772$, $\Phi(3)=0.9987$)
14. 据资料分析,某厂生产的砖的抗断强度 X 服从正态分布 $N(32.5, 1.21)$ 。今从该厂最近生产的一批砖中随机地抽取了9块,测得抗断强度(单位: kg/cm^2)的平均值为31.18。假设标准差没有改变,在0.05的显著性水平下,问这批砖的抗断强度是否合格。($u_{0.975}=1.96$)

四、证明题(本题6分)

15. 对任意方阵 A ,试证 $A+A'$ 是对称矩阵。

国家开放大学2023年秋季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题答案及评分标准

(供参考)

2024 年 1 月

一、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. C 2. A 3. B 4. D 5. C

二、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. $AB=BA$ (或:矩阵 A, B 可交换)
7. 2
8. 条件概率
9. 0.2
10. 8

三、计算题(本题共 4 小题,每小题 16 分,共 64 分)

11. 解:由 $AX-X=B$ 可得 $(A-I)X=B$ (3 分)

由已知条件可得 $A-I=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (5 分)

利用初等行变换可得

$$\begin{aligned} [A-I:I] &= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 25 & 5 & 0 \\ 15 & 24 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 25 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 15 & 0 & -120 & 75 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此, $(A-I)^{-1}=\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ (13 分)

于是由矩阵乘法可得

$$X=(A-I)^{-1}B=\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}. \quad (16 \text{ 分})$$

注:用伴随矩阵法求 $(A-I)^{-1}$ 正确也可得分.

12. 解:将齐次线性方程组的系数矩阵化为阶梯形

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1=4x_3-5x_4 \\ x_2=7x_3-6x_4 \end{cases}$ (其中 x_3, x_4 是自由未知数). (7 分)

令 $x_3=1, x_4=0$, 得相应的解向量为

$$X_1=[4 \quad 7 \quad 1 \quad 0]'$$
 (10 分)

令 $x_3=0, x_4=1$, 得相应的解向量为

$$X_2=[-5 \quad -6 \quad 0 \quad 1]'$$

于是, $\{X_1, X_2\}$ 即为方程组的一个基础解系. (13 分)

方程组的通解为 $k_1X_1+k_2X_2$ (其中 k_1, k_2 为任意常数). (16 分)

$$\begin{aligned} 13. \text{ 解: } (1) P(5 < X < 9) &= P\left(\frac{5-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{9-3}{2}\right) = P\left(1 < \frac{X-3}{2} < 3\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574 \end{aligned} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} (2) P(X > 7) &= P\left(\frac{X-3}{2} > \frac{7-3}{2}\right) = P\left(\frac{X-3}{2} > 2\right) = 1 - P\left(\frac{X-3}{2} \leq 2\right) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned} \quad (16 \text{ 分})$$

14. 解:零假设 $H_0:\mu=32.5; H_1:\mu \neq 32.5$.

由于标准差没有改变,故已知 $\sigma_0^2=1.21$, 选取样本函数

$$U=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \quad (5 \text{ 分})$$

由已知, $\bar{x}=31.18, \mu_0=32.5, \sigma_0=1.1, n=9$, 于是得

$$U=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\frac{31.18-32.5}{1.1/\sqrt{9}}=-3.6 \quad (10 \text{ 分})$$

在 0.05 的显著性水平下, $\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right|=3.6 > 1.96$, 因此拒绝零假设 H_0 , 即这批砖的抗断强度不合格. (16 分)

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明:由已知条件和对称矩阵的性质

$$(A+A')'=A'+(A')'=A'+A=A+A'$$

所以 $A+A'$ 是对称矩阵. (6 分)